Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 29.10.2012
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset 2^X$ ist genau dann ein Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$(i)\, \emptyset \in \mathcal{R}, \quad (ii)\, A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{R}, \quad (iii)\, A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}.$$

Hierbei ist $\triangle$ symmetrische Differenz: $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. In diesem Fall bildet $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ mit den Verknüpfungen $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei X eine Menge sowie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Teilmengen von X. Der (mengentheoretische) *Limes superior* und (mengentheoretische) *Limes inferior* sind definiert als

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n \geq m} A_n \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{n \to \infty} A_n := \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n \geq m} A_n.$$

Zeige

$$\begin{aligned} \liminf\nolimits_{n \to \infty}(A_n \cap B_n) &\subset \liminf\nolimits_{n \to \infty} A_n \cap \liminf\nolimits_{n \to \infty} B_n \\ &\subset \liminf\nolimits_{n \to \infty} A_n \cap \limsup\nolimits_{n \to \infty} B_n \\ &\subset \limsup\nolimits_{n \to \infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\nolimits_{n \to \infty} A_n \cap \limsup\nolimits_{n \to \infty} B_n \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Definition: *Sei R ein Ring über X. Falls $X \in \mathcal{R}$ ist, so nennt man R eine Algebra über X.* Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A} \subset 2^X$ ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra). Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra) ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Das *Cantorsche Diskontinuum* ist definiert durch $C := \{a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \,|\, a_n \in \{0, 2\} \subset [0, 1]\}$ (vgl. Ana I, Serie 7, Aufgabe 4). Zegen Sie die folgenden Aussagen.
(i) C ist abgeschloßen und hat keine inneren Punkte. Weiter ist jeder Punkt in C ein Häufungspunkt von C, d.h. C is perfect.
(ii) Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ sei der Operator $T(A) := \frac{1}{3}A \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A)$ definiert. Hier bedeutet $\frac{1}{3}A$ eine Strechung um den Faktor $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3} + A$ eine Verschiebung um $\frac{2}{3}$. Es sei $C_0 = [0, 1]$ und $C_n := T(C_{n-1})$. Dann gilt $C_n \subset C_{n-1}$ und $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$.
(iii) Berechnen Sie die Intervallängen $|C_n|$, und zeigen Sie $|C_n| \to 0$.

Abgabe ist am Montag, 5.11 bis 12:00.